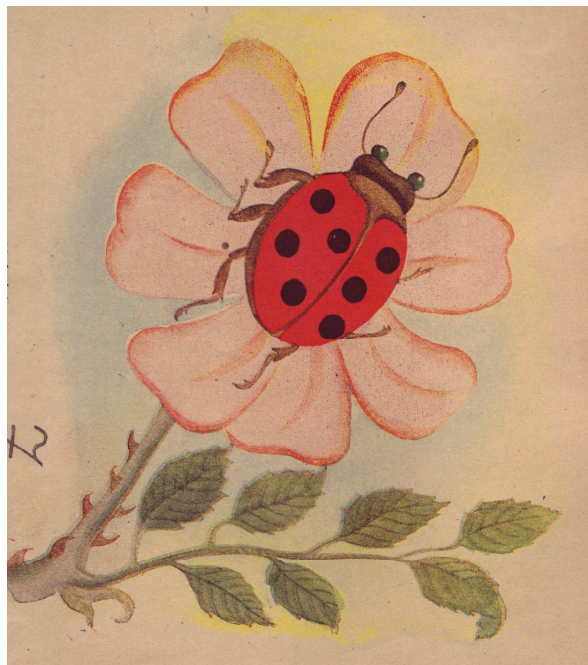


Gerhard Friedrich
Juni 2011

„Komm mit ins Zahlenland“ Ursprünge, Grundideen, theoretische Hintergründe und Praxis

Die Ursprünge der Zahlenlandidee

Die Zahlenlandidee hat eine Entwicklungsgeschichte, die sich bis in die Mitte des letzten Jahrhunderts zurückverfolgen lässt. Wahrscheinlich im Jahre 1948, eine genaue Jahresangabe der Veröffentlichung ist leider nicht bekannt, erschien von dem Autoren-Team Tanja Peter und Kurt Weinert als Bilderbuch "Peterleins Traumfahrt ins Zahlenreich" im Chronos Verlag Berlin. In diesem sehr schönen Büchlein finden sich bereits erste Ideen des heutigen Zahlenland-Konzepts, wie z.B. ein Zahlenweg, Tiere, die mit Zahlen assoziiert werden, und eine Darstellung des Anzahlkonzepts.



*„Frau Siebenpunkt, ein Käferlein,
kriecht über sieben Blättchen
hinauf zum warmen Sonnenschein
ins Rosenblätterbettchen.“*

Marienkäfer mit sieben schwarzen Punkten auf einer Rose mit sieben Blättern, sieben Blütenblättern und sieben Dornen aus dem Buch Peterleins Traumfahrt

Hans Zoozmann veröffentlichte 1950 im Schmidt Verlag Berlin das wunderbare Kinderbuch „Der Nullrich – Eine Reise ins Zahlenland“. Dies dürfte die Geburtsstunde der Namensgebung für das Zahlenland-Konzept gewesen sein.

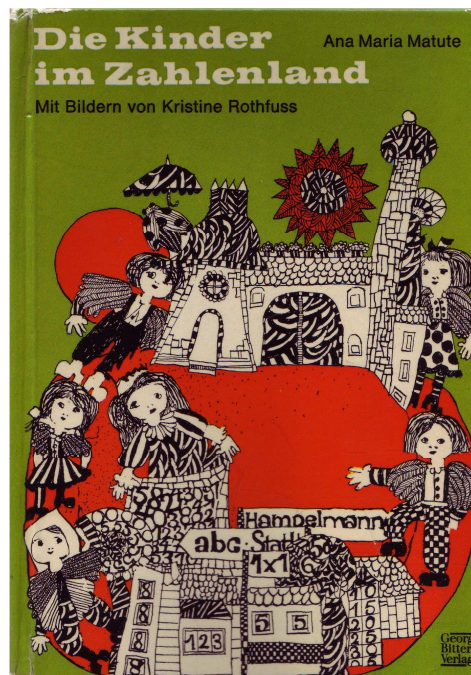
Der „Nullrich“ – eine als Person agierende „Null“ – leidet in dieser mit Versen versehenen Bildergeschichte sehr darunter, dass er von aller Welt aufgrund seiner vermeintlichen Bedeutungslosigkeit verlacht wird. Er denkt: „Ich gelte nichts und rechne nicht, mein Kopf ist hohl, rund mein Gesicht. Und alles nennt mich NULLRICH“. Erst eine Reise durch das

Zahlenland, in dem die Grundzahlen von 1 bis 10 als Phantasiewesen in Erscheinung treten, macht ihm letztlich seine große Bedeutung für alle anderen Zahlen bewusst. So gibt die (neunmal-) kluge Neun der Null zu bedenken: „Begleitest Du die kleinste Zahl, erscheint dein Wert auf einemal“.



Titelseite des Bildbandes „Der Nullrich – Eine Reise ins Zahlenland“ aus dem Jahr 1950 von Hans Zoozmann. Hier taucht die Idee, Zahlen zu personalisieren, zum ersten Mal in der Kinderliteratur auf.

Im 1974 erschienenen Buch „Die Kinder im Zahlenland“ tauchen Zahlenmärchen explizit auf, wengleich die Grundzahlen nicht spezifisch thematisiert werden.



Titelbild des Buches von Ana Maria Matute aus dem Jahre 1974

Auf den grandiosen Einfall, die Grundzahlen mit regelmäßigen geometrischen Formen und entsprechenden Aktionen in Verbindung zu bringen, kam Jahre später Wilfried Gebhard. In seinem Bilderbuch „Nil und Nele und die Zahlen“ (erschienen 1997 beim Ravensburger Buchverlag) findet sich z.B. im Land der Eins ein Baum mit einem Schäfchen in einem kreisförmigen Zaun und im Zweierland kommt alles doppelt vor:

„Willkommen im Zahlenland“, begrüßt Zweiermann Nil und Nele. Auf dem Kopf trägt er 2 Hüte. Sein Haus hat 2 Türen, aber nur 2 Fenster. Nil und Nele staunen. „Ja“, sagt Zweiermann, „zählt nur nach. Alles was ich habe, habe ich zweimal. Nur ich bin alleine. Wollt ihr 2 nicht bei mir bleiben?“ Nil und Nele schütteln den Kopf. Sie sind neugierig auf das Zahlenland und fliegen weiter.“ (Aus Nil und Nele von Wilfried Gebhard)

Und so reisen Nil und Nele weiter durch das Zahlenland und sitzen etwa im Fünferland ebenso an einem fünfeckigen Tisch, wie sie im Land der Acht einer 8-beinigen und 8-äugigen Spinne in ihrem achteckigen Spinnenetz begegnen und sie es beim Besuch im Neunerland mit 9 Kegelfrauen und Kegelmännern zu tun haben.

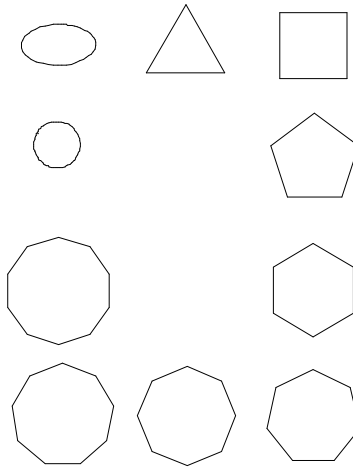


Nil und Nele und die Zahlen, hier bei der Zahl Fünf (Wilfried Gebhard, 1997, Ravensburger Buchverlag)

Anhand dieser kleinen Beispiele wird deutlich, dass die Zahlenland-Idee alles andere als "neu erfunden" ist, auch wenn dies vereinzelt behauptet wurde. Vielmehr ist es eine Tatsache, dass sich ihre Entwicklungslinie lange zurück verfolgen lässt.

Die Grundideen von „Komm mit ins Zahlenland“

Das heutige Konzept von „Komm mit ins Zahlenland“ greift diese tradierten Ideen wieder auf um diese zu systematisieren und zu erweitern. Unser Ansatz basiert auf der denkbar konkretesten Interpretation des aus der Didaktik der Mathematik stammenden Begriffs „Zahlenraum“. Dieser Begriff verweist auf den engen Zusammenhang der Zahlen zur Geometrie. Für diesen Zahlenraum von eins bis zehn wurde nach einer streng mathematischen Systematik ein Ort geschaffen, in welchem die Zahlen „zu Hause sind“: das bereits bekannte Zahlenland.



Schematischer Aufbau des Zahlenlandes

In diesem „Land der Zahlen“ erhält jede Zahl von eins bis zehn einen festen „geometrisch dargestellten Wohnort“ (Kreis, Ellipse, Dreieck, Viereck,..., Zehneck) und in Form einer Zahlenpuppe oder eines Zahlentiers einen spezifischen Charakter bzw. eine unverwechselbare Identität. Mit Hilfe dieser Zahlentiere, die in ihrer Form den einzelnen Ziffern nachempfunden sind und die zugleich den Aspekt der jeweiligen Zahl repräsentieren, werden vielfältige Aktionen ausgeführt. Das Zahlenland ist dementsprechend aus heutiger Sicht das pädagogische Äquivalent für den fachdidaktischen Begriff des Zahlenraums. Im Zahlenland sind die Zahlen zu Hause, sie besitzen beseelte Eigenschaften und geben in personalisierter Weise ihre mathematischen Eigenschaften kund.



Zahlenlandausschnitt (Garten der Drei, der Vier und der Fünf) mit Zahlenhäusern

Wesentliche Elemente des Zahlenlandes sind neben den bereits erwähnten „Zahlgärten“ (geometrische Formen) und Zahlentieren die Zahlenhäuser und -türme, besondere Zahlenmärchen, speziell für dieses Projekt komponierte Musik und ein Zahlenweg.¹

¹ Vgl. Friedrich, G. (2010). *Mathematik und Bewegung*. Zahlen Schritt für Schritt entdecken und erforschen auf dem Zahlenweg. In: Praxis der Psychomotorik, Heft 3 / 35. Jahrgang (S. 140-S. 144)



Das Zahlenhaus der „Sieben“ mit der Zahlzerlegung 5 + 2

Zu jeder Zahl gibt es entsprechende Märchen mit mathematischen Inhalten. Eine Geschichte über die Eins erzählt etwa von der Eins und ihrem Einhorn, dem ein Zahlkobold sein Horn gestohlen hat und das deshalb nun ein „Keinhorn“ ist.



Das Einhorn passend zur Geschichte der Eins.

Die Geschichte der Zwei handelt davon, dass die Zwei sich darüber ärgert, weil die Menschen meinen, sie stottere, obwohl das gar nicht stimmt, denn „alle alle Zweien Zweien reden reden so so wie wie sie sie“.

Es gibt eine Drei, die drei Wünsche erfüllen kann, eine kranke Vier, deren Krankheit dazu führt, dass alle Viererdinge (Tischbeine, Autobereifung usw.) durcheinander geraten oder eine Fünf, die internationalen Besuch von fünf Kindern aus fünf Kontinenten bekommt usw.

Korrespondierend zu diesen Zahlengeschichten arbeiten wir mit Zahlenliedern, die streng „mathematisch“ komponiert wurden. So singt die „Eins“ ihr Lied mit nur einem einzigen Ton im Einertakt. Die „Zwei“ entsprechend mit zwei Tönen im 2/4 Takt, die „Drei“ liebt den Walzer und kommt mit genau drei Tönen aus usw.

Fünfer - Lied

Text/Komp: Vio de Galgóczy 03

(2+3) Fünf E-cken hat mein Haus, schau-en fünf Mäus-lein he-raus,
 fünf Fin-ger hat mei-ne Hand, schön ist's im Zah-len-land,
 fünf sind mehr als drei, schon ist mein Lied vor-bei!

Noten des Fünfer-Lieds im 5/4-Takt mit dem Tonumfang einer Quinte

Theoretische Hintergründe

Was schon Heinrich Pestalozzi (1746-1827) forderte – eine gute Erziehung müsse mit „Kopf, Herz und Hand“ erfolgen –, entspricht auch unseren modernen Einsichten. Informationen werden dann am besten gespeichert, wenn sie auf möglichst vielfältige Weise dargeboten und verarbeitet werden. Gerade die moderne Hirnforschung unterstützt nachdrücklich Pestalozzis Forderung.

Meist wird Ganzheitlichkeit – ganz im Sinne von Pestalozzi – auf der Subjektseite, also beim Lernenden angesiedelt. Ganzheitliches Lernen beinhaltet dabei das möglichst vielfältige Zusammenspiel verschiedener Sinne, z.B. Augen, Tastsinn, Gehör, Gleichgewichtssinn und Bewegungssinn. Der Wahrnehmungsprozess bildet dabei ein ganzheitliches Ereignis, bei dem unterschiedliche Sinne eine Gesamtempfindung hervorbringen.

Es geht aber auch darum, den ganzen Menschen mit der ganzen Sache zusammenzubringen.

Bezogen auf unseren Lerngegenstand des Zahlenraums von eins bis zehn beinhaltet ganzheitliches Lernen auf dieser Objektseite die gesamte sinnliche Erfahrung der Bedeutungsvielfalt dieser Grundzahlen. In der Didaktik der Mathematik sprechen wir von Zahlaspekten. Im Einzelnen sind dies:

- Kardinaler Zahlaspekt: Zahlen werden benutzt, um die Anzahl oder Mächtigkeit der Elemente einer Menge anzugeben (z.B. 6 Äpfel, 3 Tannenzapfen).
- Ordinaler Zahlaspekt: Zahlen werden benutzt, um einen Rangplatz in einer geordneten Menge anzugeben (z.B. der Erste, der Dritte usw.).
- Nominaler Zahlaspekt bzw. Codierungsaspekt: Zahlen werden als Namen zur Benennung oder Kennzeichnung benutzt (z.B. Postleitzahlen oder Telefonnummern).
- Kultureller oder narrativer Zahlaspekt: Zahlen kommen in Märchen, Riten, Erzählungen usw. vor und besitzen eine symbolische oder mythische Bedeutung (z.B. die Zahl 13 als Zahl des Unglücks, die Zahl sieben als Glückszahl).
- Maßzahlaspekt: Zahlen werden zur Quantifizierung von Größen benutzt (z.B. zwei Minuten, fünf Kilometer).
- Operatoraspekt: Zahlen werden in Verbindung mit einer Funktion benutzt, z.B. als Vielfaches einer Handlung (zweimal Rasenmähen, dreimal Einkaufen).
- Geometrischer Zahlaspekt: Zahlen werden zur Identifikation geometrischer Muster benutzt (z.B. ein Fünfeck, ein Dreieck).

- Rechenaspekt: Zahlen geben das Ergebnis einer Rechnung, z.B. einer Addition an (z.B. $5=3+2$).

Im Zahlenland selbst sieht dies beispielsweise so aus: Der Zahlengarten der Zahl Fünf befindet sich zwischen dem der Vier und dem der Sechs (ordinaler Zahlaspekt). Der Garten selbst ist als regelmäßiges Fünfeck konstruiert (geometrischer Aspekt) und kann an jeder Ecke verziert werden (Eins-zu-Eins-Zuordnung). Im Garten befindet sich ein Haus mit fünf Fenstern (kardinaler Zahlaspekt) und aufsteckbarer Hausnummer (Kodierungsaspekt) sowie ein Zahlenturm, mit dessen Hilfe Zahlzerlegungen (Rechenaspekt: $1+4$ oder $3+2$) veranschaulicht bzw. konstruiert werden können. Neben den aufgelisteten Zahlaspekten suchen wir darüber hinaus die Zahlen in musikalischen Strukturen und vor allem in der konkreten Lebenswelt der Kinder.

Wir sehen also, dass wir die Forderung nach „ganzheitlichem Lernen“ sowohl auf den Lernenden selbst (Subjektseite) und auf den Lerngegenstand (Objektseite) beziehen können.

Weitere methodische Ideen schöpft das Projekt aus verschiedenen Wissensbereichen, von denen ich die zwei wichtigsten noch kurz erwähnen möchte. Der erste Bereich ist die „Neurodidaktik“.

Aus der Hirnforschung wissen wir beispielsweise, dass das Gedächtnis der Kinder in erster Linie durch konkrete Situationen und besondere Erlebnisse geprägt ist. Dies gilt insbesondere, wenn diese Erlebnisse oder Ereignisse einen Neuigkeitswert besitzen und den Kindern bedeutsam erscheinen. Aber Kinder können sich nicht nur die Ereignisse gut merken, sondern auch die Orte, an denen sie stattfanden. Beim Einspeichern einer Episode werden auch die zugehörigen Ortskoordinaten eingespeichert. Diesen beiden Tatsachen versuchen wir dadurch Rechnung zu tragen, indem jede Zahl einen festen Ort im Raum erhält (die Zahlengärten liegen immer in der gleichen Anordnung) und wir unsere Grundzahlen zu „Zahlereignissen“ werden lassen. Aus diesem Grund arbeiten wir neben vielgestaltigen Spielen vor allem mit den erwähnten Zahlenliedern und Zahlengeschichten oder auch Abzählreimen mit dem Ziel, die Zahlen in episodische Handlungsabläufe einzubetten.

Der zweite Bereich ist die Entwicklungspsychologie in Verbindung mit der Elementarpädagogik. Bei der Begegnung der Vorschulkinder mit der Welt der elementaren Mathematik bzw. der Zahlen arbeiten wir ganz bewusst mit so genannten Anthropomorphismen. Darunter versteht man ganz allgemein die Zuschreibung menschlicher Eigenschaften oder Verhaltensweisen auf nichtmenschliche Objekte oder auch Tiere. In unserem Konzept werden gezielt konstruierte Anthropomorphismen (in Form personalisierter Zahlentiere) als didaktische Hilfsmittel eingesetzt.

Kinder der Alterstufe von drei bis sechs Jahren betrachten die Dinge um sich herum wesentlich stärker emotional als rational und sie haben ihre eigene, altersbedingte kognitive Erlebnis- und Denkweise. Daher kommt es, dass sie Gegenständen Gefühle, Leben und Absichten unterstellen. Die Dinge der kindlichen Umwelt sind entweder brav oder böse, freundlich oder unfreundlich, sie schauen für das Kind Vertrauen erweckend oder beängstigend aus.

Kinder in diesem Alter sind außerdem vom magischen und finalistischen Denken geprägt. Dabei werden Vorgänge, die eine logische Ursache haben, als geheimnisvoll erlebt und so gedeutet, als könne man sie durch Zauberei, durch Magie und vor allem durch eigene Wünsche beeinflussen. Alles, was geschieht, hat einen bestimmten Zweck oder verfolgt eine bestimmte Absicht.

Vor diesem Hintergrund wird deutlich, warum der methodische Weg, die Grundlagen der elementaren Mathematik in eine fantasievolle Welt zu projizieren, für die Kinder eine große Motivation darstellt.

Ergebnisse

„Komm mit ins Zahlenland“ wurde von Wissenschaftlern und Praktikern entwickelt. Zu Grunde liegen der Bildungsgedanke der Ko-Konstruktion sowie die didaktischen Prinzipien der Ganzheitlichkeit bzw. der Handlungsorientierung. Entsprechend konsequent sind deshalb auch die Denkweisen vom Kind aus und die Orientierung an dessen Interessen, Erfahrungen und Bedürfnissen. Als offenes Konzept lässt es sich problemlos an individuelle Bedürfnisse vor Ort anpassen. Eigene Ideen der Kinder tragen zentral zu Motivation und zum Herstellen von Zusammenhängen bei.

Da die Wirksamkeit des Konzeptes in zwei unabhängigen wissenschaftlichen Studien beeindruckend nachgewiesen wurde (Friedrich u. Munz, 2006 und Pauen, 2009) ist es kaum verwunderlich, dass das Konzept inzwischen in sehr viele Einrichtungen eingezogen. Bei den Rückmeldungen, die wir aus der Praxis erhalten freut uns vor allem, dass wir neben Hinweisen, was jeweils übernommen wurde auch erfahren, was konzeptionell verändert und im Hinblick auf die spezifische Einrichtung angepasst wurde. Dies ist auch völlig in unserem Sinne da es uns vor allem darum geht, Erzieherinnen und Erzieher zu ermutigen, sich dem Thema der frühen mathematischen Bildung anzunehmen. Allen Antworten gemeinsam ist jedoch die Auskunft darüber, dass die Hauptpersonen, unsere Kinder also, sich mittels „Komm mit ins Zahlenland“ die Welt der Zahlen mit unglaublich großer Freude erschließen.



Kinder beim Spielen des Lernspiels „Komm mit ins Zahlenland“

Zum Schluss noch einige lustige Spiele, die Sie mit ihren Kindern ohne größere Vorbereitungen durchführen können.

Nimm und Gewinn

Auf einem Tisch wird eine bestimmte Anzahl von Gegenständen (Murmeln, Nüsse, Cent Stücke usw.) ausgeschüttet. Gewürfelt wird abwechselnd und man darf so viele Gegenstände wegnehmen, wie es Augen gewürfelt hat. Nachdem der letzte Gegenstand weggenommen wurde, werden die gewonnenen Gegenstände verglichen. Wer am meisten besitzt, hat gewonnen.

Natürlich lässt sich dieses Spiel auch in umgekehrter Logik spielen. Jeder Spieler erhält einen gewissen Vorrat an Gegenständen (zum Beispiel 10, 12 oder 14). Entsprechend der gewürfelten Augenzahl darf er Gegenstände weglegen. Gewonnen hat derjenige, der als erstes alle Gegenstände losgeworden ist. Eine besondere Schwierigkeit kann man dadurch aufbauen, dass der letzte Wurf genau stimmen muss.

Alles oder nichts

Zu Beginn wird eine gewisse Menge an Gegenständen (z.B. 20 Kastanien, Streichhölzer, Reissnägel etc.) halbiert und dann wird abwechselnd gewürfelt.

Die Augenzahl, die gewürfelt wird, darf dem Gegner weggenommen werden. Dann ist dieser an der Reihe. Das Spiel „purzelt“ auf diese Weise hin und her, bis entweder Sie oder ihr Kind keine Gegenstände mehr hat.

Eine besonders interessante und lehrreiche Variante besteht darin, mit echten Geldwerten zu spielen. Jeder Spieler erhält eine 5-Cent-Münze, zwei 2-Centmünzen und eine 1-Centmünze. Je nachdem welche Zahl gewürfelt wird, muss man die Geldbeträge dem Gegner geben. Diese Erschwernis führt dazu, dass Spielzüge entstehen, bei denen „Herausgeben“ werden muss.

Greif hinein!

In einem kleinen Säckchen befinden sich kleine Kiesel- oder Muggelsteine. Ein Kind greift hinein und holt mit geschlossener Hand eine Anzahl an Steinen heraus. Nun muss es erraten bzw. erfühlen, wie viele es in der Hand hat. Natürlich dürfen weitere Kinder dabei mitraten. Das Spiel lässt sich auch variieren, indem z. B. eine Zahl vorgegeben wird, die mit einem Griff als Anzahl der Steine herausgeholt werden muss.

Welche Zahl liegt unten?

Ihr Kind würfelt mit einem normale Würfel. Nun muss das Kind sagen, welche Augenzahl es gewürfelt hat. Diese Augenzahl liegt natürlich „oben“ und die Antwort fällt einfach. Wer weiß aber, welche Augenzahl unten liegt? (Die Summe aus gegenüberliegenden Augenzahlen ergibt stets 7.) Sicher können die Kinder diese Aufgaben nicht beim ersten Spielen beantworten, sie geraten aber immens ins Staunen, wenn ein Erwachsener die Antwort immer weiß und sind sie einmal hinter das Geheimnis gekommen, so haben sie größte Freude daran, das Ergebnis selbst „auszurechnen“ und es dann zu überprüfen.

Immer 10

Für dieses Spiel benötigen Sie so genannte Wendepättchen. Wendepättchen sind kreisrunde kleine Scheiben, deren eine Seite z. B. rot und die andere z. B. grün ist. Natürlich gehen auch anderen Farben, wichtig ist nur, dass sich die beiden Seiten farblich unterscheiden. Wendepättchen lassen sich leicht selbst herstellen, indem man z. B. 1-Cent Münzen beidseitig farbig überklebt oder indem man einen Korken in Scheiben zerschneidet und bunt anmalte. Aus dickerem Karton lassen sich diese natürlich auch sehr leicht herstellen. Die Kinder werfen nun z. B. 10 Stück (jede andere Zahl geht natürlich ebenso) auf den Tisch und entdecken so ganz anschaulich die verschiedenen Zehnerzerlegungen, z.B. 4 rote und 6 grüne Plättchen.

Zum Schluss noch ein einfaches Spiel zur Simultanerfassung

Gebraucht werden ein, zwei oder drei Schaumstoffwürfel, je nach Alter der Kinder. Bei den Würfelbildern 1,3 und 5 wird der Punkt in der Mitte ein Eisloch. Die Punkte darum herum symbolisieren die Eisbären. Würfelt ein Kind z.B. eine 5 sagt es 4 Eisbären und 1 Eisloch. Bei

der 2, 2 Eisbären und kein Eisloch. Wird das Spiel mit zwei Würfeln gespielt und das Kind würfelt 4 und 6 sagt es 10 Eisbären und kein Eisloch usw..

Literatur:

Friedrich, G. u. Bordihn, A. (2003). Spot: *So geht's – Spaß mit Zahlen und Mathematik im Kindergarten*. Sonderheft der Zeitschrift „kindergarten heute“. Freiburg: Herder Verlag

Friedrich, G. u. Munz, H. (2006). Förderung schulischer Vorläuferfähigkeiten durch das didaktische Konzept „Komm mit ins Zahlenland“. In: Psychologie in Erziehung und Unterricht, 2006, 53 (S. 134-146)

Friedrich, G. (2006). „*Neurodidaktik*“ – eine neuen Didaktik? Zwei Praxisberichte aus methodisch-didaktischem Neuland. In: Herrmann, U. (Hrsg.) Neurodidaktik. (S. 217 – 233). Weinheim: Beltz

Friedrich, G. u. Galgóczy, V. u. Schindelhauer, B. (2010). *Komm mit ins Zahlenland. Eine spielerische Entdeckungsreise in die Welt der Mathematik. Völlig überarbeitete Neuauflage. Freiburg: Herder*

Das dazugehörige Spiel zum Buch „Komm mit ins Zahlenland“ ist im IQ-Spiele Verlag erschienen

Friedrich, G. (2010). *Mathematik und Bewegung. Zahlen Schritt für Schritt entdecken und erforschen auf dem Zahlenweg*. In: Praxis der Psychomotorik, Heft 3 / 35. Jahrgang (S. 140-S. 144)

Gebhard, W. (1997). *Nil und Nele und die Zahlen*. Ravensburger Buchverlag

Matute, A. M. (1974) *Die Kinder im Zahlenland*. Bitter Verlag: Recklinghausen

Pauen, S. u Herber, V. (2009): *Vom Kleinsein zu Einstein*, Berlin: Cornelson Scriptor

Zoozmann, H. (1950). *Der Nullrich – Eine Reise ins Zahlenland*. Schmidt Verlag: Berlin

Dr. habil. Gerhard Friedrich ist Diplom-Pädagoge und Lehrer für die Fächer Mathematik, Technik, Pädagogik und Psychologie. Er lehrt an der Universität Bielefeld als Privatdozent.

Weitere Informationen: www.ifvl.de